Licence Informatique, semestre 5 — 2016–17
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 2 novembre 2016
`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

Partiel - 25 octobre 2016

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 5 pages, le barème est indicatif.
Les réponses au QCM (dernière page) seront inscrites sur l'énoncé sur lequel vous reporterez votre nom et que vous rendrez avec votre copie. Toutes les réponses (sauf QCM) devront être clairement justifiées.
Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. **Ne pas cacheter les copies !**

Exercice 1 *Enigme (4 points)*

Vous vous trouvez devant trois portes A, B et C. Derrière chaque porte se trouve soit un Crouté, soit un Roro. Il y a au moins un Roro et un Crouté cachés mais on ne sait pas s'il y a deux Roros ou bien deux Croutés. Sur chaque porte il y a un message. Le message est vrai s'il y a un Roro derrière la porte et faux si c'est un Crouté. Les messages sont les suivants :

A. les portes B et C contiennent les mêmes types de créature (2 Roros ou 2 Croutés)

B. Il y a des Croutés derrière deux portes

C. Il n'y a pas de Crouté derrière cette porte

On introduit trois variables R_A, R_B et R_C.
La variable R_X est vraie s'il y a un Roro derrière la porte X.

Questions.

1. En utilisant ces variables, donner les formules propositionnelles F_A, F_B, F_C qui représentent les phrases inscrites sur chacune des portes (F_X représente la formule inscrite sur la porte X).
2. Combien y-a-t-il en général d'interprétations différentes pour un problème avec trois variables propositionelles ? Sans tenir compte de ce qui est écrit sur les portes, peut-on éliminer a priori certaines interprétations dans ce problème ? Si oui combien et pourquoi ?
3. Faire une table de vérité pour les formules F_A, F_B et F_C.
4. Sachant que la porte d'un Roro dit vrai et celle d'un Crouté dit faux, si R_A et R_B sont vraies, quelles valeurs devrait-on avoir pour F_A, F_B et F_C ? cette situation est-elle possible ?
5. Répondre aux questions
   — Y-a-t-il deux Croutés derrière les portes ?
   — Quelle porte ouvrir pour trouver un Roro ?

Correction :

1. *Les données se traduisent par les formules propositionnelles suivantes :*
   A) $(R_B \wedge R_C) \vee (\neg R_B \wedge \neg R_C)$
   B) $(\neg R_A \wedge \neg R_B) \vee (\neg R_C \wedge \neg R_B) \vee (\neg R_C \wedge \neg R_A)$
   C) R_C

   Il y a en général 8 *interprétations possibles, mais on exclut celles qui correspondent à 3 Roros (les trois variables vraies) et trois Croutés ((les trois variables fausses). Il en reste* 6.

3. *La table de vérité est*

R_A	R_B	R_C/F_C	F_A	F_B
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

4. *Si R_A et R_B sont vrais alors R_C doit être faux (car il y a au moins un Crouté). Comme A et B disent la vérité et C ment, on doit avoir F_A et F_B doivent être vrais et F_C faux. Or dans ce cas on a F_A et F_B faux, donc cette situation n'est pas possible.*
5. *On doit avoir R_X vrai si et seulement si F_X est vrai et cela pour les trois portes. La seule ligne pour laquelle la condition est remplie est l'avant dernière. Il y a donc deux Croutés derrière les portes A et C et un seul Roro derrière la porte B.*

Exercice 2 *Séquents propositionnels (3 points)*

Soit les deux séquents

S_1 : $\neg q \Rightarrow r \vdash \neg(q \Rightarrow p), r \wedge \neg p, p$

S_2 : $r \Rightarrow p, \neg q, q \Rightarrow r \vdash$

1. Donner les formules logiques associées à ces séquents.
2. Construire des arbres de preuves dans le système G des séquents donnés.
3. Dire si chacun des séquents est valide, dans le cas où le séquent n'est pas valide, donner une interprétation qui le rend faux.

Correction :

1. *$F_1 \stackrel{\text{def}}{=} ((\neg q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\neg(q \Rightarrow p) \vee (r \wedge \neg p) \vee p)$ et $F_2 \stackrel{\text{def}}{=} ((r \Rightarrow p) \wedge (\neg q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow \bot$*
2. *Arbre pour le séquent S_1 :*

$$(\neg d)\ \dfrac{(\Rightarrow g)\ \dfrac{(\Rightarrow g)\ \dfrac{(\neg d)\ \dfrac{\text{HYP}\ \dfrac{}{q \vdash r \wedge \neg p, p, q}}{\vdash r \wedge \neg p, p, q, \neg q} \quad (\wedge g)\ \dfrac{\text{HYP}\ \dfrac{}{r \vdash r, p, q} \quad (\neg d)\ \dfrac{\text{HYP}\ \dfrac{}{p \vdash p, q}}{r \vdash \neg p, p, q}}{r \vdash r \wedge \neg p, p, q}}{(\neg q) \Rightarrow r \vdash r \wedge \neg p, p, q} \quad \text{HYP}\ \dfrac{}{(\neg q) \Rightarrow r, p \vdash r \wedge \neg p, p}}{(\neg q) \Rightarrow r, (q \Rightarrow p) \vdash r \wedge \neg p, p}}{(\neg q) \Rightarrow r \vdash \neg(q \Rightarrow p), r \wedge \neg p, p}$$

Arbre pour le séquent S_2 :

$$(\neg g)\ \dfrac{(\Rightarrow g)\ \dfrac{(\Rightarrow g)\ \dfrac{\vdash q, r \qquad p \vdash q}{r \Rightarrow p \vdash q} \quad (\Rightarrow g)\ \dfrac{\text{HYP}\ \dfrac{}{r \vdash q, r} \qquad p, r \vdash q}{r \Rightarrow p, r \vdash q}}{r \Rightarrow p, q \Rightarrow r \vdash q}}{r \Rightarrow p, \neg q, q \Rightarrow r \vdash}$$

3. — *le séquent S_1 est prouvable (toutes les feuilles correspondent à des règles hypothèses) donc le séquent est valide.*
   — *le séquent S_2 admet trois feuilles qui ne sont pas valides, donc il n'est pas valide, les interprétations qui le rendent faux sont*
     — *q et r faux*
     — *p vrai et q faux*
     — *la troisième feuille $p, r \vdash q$ est fausse lorsque p et r sont vrais et q faux ce qui est couvert par le cas précédent.*

Exercice 3 *Modélisation (3 points)*

On se place sur un langage avec une constante `moi` (la personne qui parle-“je”), une relation unaire et trois relations binaires :

— $\texttt{mal}(x)$: x est mal (ou mauvais)
— $\texttt{fait}(x, y)$: la personne x fait la chose “y”
— $\texttt{veut}(x, y)$: la personne x veut la chose “y”
— $x = y$ si x et y sont égaux

1. Traduire en français les formules suivantes :
   (a) $\forall x, \texttt{veut}(\texttt{moi}, x) \Rightarrow \texttt{fait}(\texttt{moi}, x)$
   (b) $\forall x, \texttt{veut}(\texttt{moi}, x) \wedge \texttt{mal}(x) \Rightarrow \neg\texttt{fait}(\texttt{moi}, x)$
   (c) $\forall x, \exists y, \texttt{fait}(x, y) \wedge \neg\texttt{veut}(x, y)$
   (d) $\exists y, \forall x, \texttt{veut}(x, y) \wedge \neg\texttt{fait}(x, y)$

   Correction :
   (a) je fais ce que je veux
   (b) je ne fais pas les choses mauvaises que je veux
   (c) tout le monde a quelque chose qu'il fait mais qu'il ne veut pas
   (d) il existe une chose que tout le monde veut mais que personne ne fait

2. Donner les formules logiques qui correspondent aux énoncés suivants :
   (a) Je ne fais pas toujours ce que je veux.
   (b) Je ne fais jamais ce que je veux.
   (c) Il n'y a que ceux qui ne font rien qui ne font pas de mal.
   (d) Je ne peux faire qu'une chose à la fois.

   Correction :
   (a) $\exists x, \texttt{veut}(\texttt{moi}, x) \wedge \neg\texttt{fait}(\texttt{moi}, x)$
   (b) $\forall x, \texttt{veut}(\texttt{moi}, x) \Rightarrow \neg\texttt{fait}(\texttt{moi}, x)$
   (c) $\forall x, (\forall y, \texttt{fait}(x, y) \Rightarrow \neg\texttt{mal}(y)) \Rightarrow (\forall y, \neg\texttt{fait}(x, y))$
   (d) $\forall x\, y, \texttt{fait}(\texttt{moi}, x) \wedge \texttt{fait}(\texttt{moi}, y) \Rightarrow x = y$

3. Donner pour chacun des quatre énoncés précédents, un énoncé en langue naturelle qui exprime la négation de la formule.

   Correction :
   (a) Je fais toujours ce que je veux
   (b) il y a au moins une chose que je veux et que je fais
   (c) il existe quelqu'un qui fait quelque chose et qui ne fait jamais rien de mal
   (d) Je peux faire au moins deux choses à la fois

Exercice 4 *Transformation de formules propositionnelles (5 points)*

On cherche à montrer que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule qui ne contient que des variables propositionnelles, et les connecteurs de disjonction ($A \vee B$) et de négation ($\neg A$). On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble de telles formules.

1. Soit p une variable propositionnelle
   — Dire si les formules suivantes sont dans $\mathcal{C}$
     (a) $p \vee \neg p$
     (b) $p \wedge \neg p$

     Correction : *La formule $p \vee \neg p$ est dans $\mathcal{C}$ (que des négations et des disjonctions) mais la formule $p \wedge \neg p$ n'y est pas car elle contient une conjonction.*

— En utilisant la variable p, donner une formule de l'ensemble $\mathcal{C}$ équivalente à $\bot$ et une autre équivalente à $\top$.
Correction : on a $\bot \equiv \neg(p \vee \neg p)$ et $\top \equiv p \vee \neg p$. Une formule équivalente à $\bot$ dans $\mathcal{C}$ est donc $\neg(p \vee \neg p)$ et une formule équivalente à $\top$ dans $\mathcal{C}$ est donc $p \vee \neg p$

2. Soit p et q deux variables propositionnelles, donner des formules de $\mathcal{C}$ équivalentes à $p \wedge q$ et $p \Rightarrow q$.
Correction : Une formule équivalente à $p \wedge q$ dans $\mathcal{C}$ est $\neg(\neg p \vee \neg q)$ en utilisant les lois de de Morgan et une formule équivalente à $p \Rightarrow q$ dans $\mathcal{C}$ est $\neg p \vee q$).

3. Donner les équations récursives qui définissent une fonction `fdisj` qui à toute formule propositionnelle P associe une formule de $\mathcal{C}$ équivalente.
Correction :

$$\begin{array}{lll}
\mathtt{fdisj}(\bot) & =\neg(p \vee \neg p) & \\
\mathtt{fdisj}(\top) & =p \vee \neg p & \\
\mathtt{fdisj}(p) & =p & \textit{si } p \textit{ est une variable propositionnelle} \\
\mathtt{fdisj}(\neg P) & =\neg(\mathtt{fdisj}(P)) & \\
\mathtt{fdisj}(P \vee Q) & =\mathtt{fdisj}(P) \vee \mathtt{fdisj}(Q) & \\
\mathtt{fdisj}(P \wedge Q) & =\neg(\neg \mathtt{fdisj}(P) \vee \neg \mathtt{fdisj}(Q)) & \\
\mathtt{fdisj}(P \Rightarrow Q) & =\neg(\mathtt{fdisj}(P)) \vee \mathtt{fdisj}(Q) &
\end{array}$$

4. On introduit un ordre sur les valeurs propositionnelles : $F \leq V$, c'est-à-dire que le faux est plus petit que le vrai.
On en déduit un ordre sur les interprétations $I_1 \leq I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \forall p, I_1(p) \leq I_2(p)$, c'est-à-dire que pour toute variable propositionnelle p, la valeur de cette variable dans l'interprétation I_1 est inférieure ou égale à la valeur de la variable dans l'interprétation I_2.
Montrer par récurrence sur la structure de la formule P que si P ne contient ni le symbole $\neg$ ni le symbole $\Rightarrow$ et si $I_1 \leq I_2$ alors $\mathtt{val}(I_1, P) \leq \mathtt{val}(I_2, P)$.
Correction :
On se donne deux interprétations I_1 et I_2 telles que $I_1 \leq I_2$. La formule à montrer $\phi(P)$ est "si P ne contient pas le symbole $\neg$ et le symbole $\Rightarrow$ alors $\mathtt{val}(I_1, P) \leq \mathtt{val}(I_2, P)$. On raisonne par récurrence sur la structure de la formule en considérant chaque cas :
   (a) *Si P est une variable propositionnelle, alors $\mathtt{val}(I_1, P) = I_1(P) \leq I_2(P) = \mathtt{val}(I_2, P)$*
   (b) *Si P est de la forme $\neg Q$ ou $Q \Rightarrow R$ alors la propriété $\Phi(P)$ est trivialement vraie car elle ne concerne que les formules sans négation ni implication.*
   (c) *Si P est de la forme $Q \wedge R$, on peut supposer que les propriétés $\Phi(Q)$ et $\Phi(R)$ sont vraies et comme Q et R ne contiennent pas non plus les connecteurs $\neg$ et $\Rightarrow$ on a $\mathtt{val}(I_1, Q) \leq \mathtt{val}(I_2, Q)$ et $\mathtt{val}(I_1, R) \leq \mathtt{val}(I_2, R)$. On raisonne par cas sur la valeur de $\mathtt{val}(I_2, R)$*
      — *Si $\mathtt{val}(I_2, R) = V$ alors on a forcément $\mathtt{val}(I_1, R) \leq \mathtt{val}(I_2, R)$.*
      — *Si $\mathtt{val}(I_2, Q \wedge R) = F$ alors $\mathtt{val}(I_2, Q) = F$ ou $\mathtt{val}(I_2, R) = F$. Dans le premier cas ($\mathtt{val}(I_2, Q) = F$) on a aussi $\mathtt{val}(I_1, Q) = F$ (car $\mathtt{val}(I_1, Q) \leq \mathtt{val}(I_2, Q)$) et donc $\mathtt{val}(I_1, P) = F = \mathtt{val}(I_2, P)$. Le cas où $\mathtt{val}(I_2, R) = F$ se traite de la même manière.*
   (d) *Si P est de la forme $Q \vee R$, on raisonne de manière analogue au cas de $Q \wedge R$. On sait (par hypothèse de récurrence) que $\mathtt{val}(I_1, Q) \leq \mathtt{val}(I_2, Q)$ et $\mathtt{val}(I_1, R) \leq \mathtt{val}(I_2, R)$. On regarde le cas où $\mathtt{val}(I_2, P) = F$. On a alors $\mathtt{val}(I_2, Q) = F$ et $\mathtt{val}(I_2, R) = F$, on a don aussi $\mathtt{val}(I_1, Q) = F$ (car $\mathtt{val}(I_1, Q) \leq \mathtt{val}(I_2, Q)$) et $\mathtt{val}(I_1, R) = F$ et donc $\mathtt{val}(I_1, P) = F$.*

   On a bien montré que dans tous les cas la propriété $\Phi(P)$ est vérifiée.

5. En déduire qu'il n'y a pas de formule équivalente à $\neg p$ qui n'utilise que les connecteurs $\vee$ et $\wedge$.
Correction : On suppose que $\neg p$ est équivalente à une formule A sans négation ni implication. Soit I_1 et I_2 deux interprétations telles que $I_1(q) = F$ et $I_2(q) = V$ pour toutes les variables propositionnelles q. On a bien $I_1 \leq I_2$. Donc on devrait avoir (résultat précédent) que $\mathtt{val}(I_1, A) \leq$

$\texttt{val}(I_2, A)$. Or comme $A \equiv \neg p$, et que des formules équivalentes ont même valeur pour n'importe quelle interprétation, on a $\texttt{val}(I_1, A) = \texttt{val}(I_1, \neg p) = V$ et $\texttt{val}(I_2, A) = \texttt{val}(I_2, \neg p) = F$ donc $\texttt{val}(I_1, A) \not\leq \texttt{val}(I_2, A)$.

On en déduit que $\neg p$ ne peut être équivalente à une formule sans négation ni implication.

Exercice 5 *QCM, (entre 0 et 5 points)* ($+\frac{1}{3}$ par réponse correcte, $-\frac{1}{3}$ par réponse incorrecte)
Ecrire les réponses sur l'énoncé qui sera rendu avec les copies.
Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (sans justification).

NOM : . . . . **Prénom :**		
Affirmation	vrai	faux
$A \vee B = B \vee A$		X
$A \Rightarrow B \wedge C = A \Rightarrow (B \wedge C)$	X	
$A \Rightarrow B \Rightarrow C \equiv (A \wedge B) \Rightarrow C$	X	
$\neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg A \wedge \neg B$		X
Si $P \Rightarrow Q$ est faux alors P est vrai.	X	
Si $P \vee Q$ est vrai alors Q est vrai.		X
Si P est vrai alors $(\neg P) \Rightarrow Q$ est faux.		X
La formule $A \Rightarrow \neg B$ est satisfiable	X	
La formule $A \Rightarrow \neg B$ est valide		X
L'ensemble $\{A \Rightarrow B, \neg B\}$ est satisfiable	X	
L'ensemble $\{A \Rightarrow \neg B, A \wedge B\}$ est satisfiable		X
Soit `joue` un prédicat binaire tel que $\texttt{joue}(x, y)$ représente le fait que x joue avec y.		
$\forall x, \exists y, \neg\texttt{joue}(x, y)$ signifie qu'il existe quelqu'un avec qui personne ne joue.		X
La formule $(\exists x\, y, \texttt{joue}(x, y)) \Rightarrow \exists z, \texttt{joue}(z, z)$ est toujours vraie.		X
$\forall x, \exists y, \exists z, (\texttt{joue}(x, y) \wedge \texttt{joue}(x, z))$ signifie que toute personne joue avec au moins deux personnes différentes.		X
Un ensemble vide de clauses correspond à la formule $\perp$ toujours fausse		X
Soient p, q, et r des variables propositionnelles		
$p \wedge \neg q$ est une clause		X
la clause formée des littéraux p et $\neg p$ est toujours vraie	X	
$p \vee \neg q \vee r$ est en forme normale conjonctive	X	
$\neg p \vee q \wedge r$ est en forme normale conjonctive		X
Il existe un algorithme qui décide si un ensemble de clauses est satisfiable en un temps proportionnel au nombres de variables dans les clauses		X