Licence STS, semestre 4 — 2012–13
Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) — 28 janvier 2013
`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo`

1 Règles de déduction naturelle

Pour établir la validité des formules, on introduit un système de déduction qui permet de déduire qu'une formule est une conséquence logique d'un ensemble de formules.

On écrit cette relation $\Gamma \vdash P$ avec Γ un ensemble de formules et P une formule. On appelle cet objet un *séquent*.

L'interprétation de cette relation est que si on a pu dériver $\Gamma \vdash P$ et que les formules dans Γ sont vraies alors la formule P est vraie.

Nous utiliseons un système appelé la *déduction naturelle*. Ce système organise les étapes de déduction en deux catégories en fonction du connecteur principal d'une formule P. Les étapes d'*introduction* expliquent comment on peut construire une dérivation de $\Gamma \vdash P$ et des règles d'*élimination* expliquent comment on peut exploiter une preuve de $\Gamma \vdash P$ obtenue par ailleurs. On donne aussi dans la dernière colonne des règles alternatives lorsque la formule à éliminer est une hypothèse.

Une démonstration dans ce système se construit sous la forme d'un arbre dont la racine est le séquent à prouver et dont chaque nœud correspond à une des règles de la logique. Les feuilles seront formées des règles qui n'ont pas de conditions (la règle d'hypothèse, l'introduction de l'égalité ou de la formule $\top$).

	Hypothèse	Classique	Coupure
	$\dfrac{A \in \Gamma}{\Gamma \vdash A}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$
	Introduction(I)	Élimination(E)	Hypothèse(H)
$\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}$		$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \top \vdash A}$
$\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash C}$	$\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash C}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash C}$	$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash C}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$ $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$ $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma, B \vdash C \qquad \Gamma, A \Rightarrow B \vdash A}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C}$
$\forall$	$\dfrac{\Gamma \vdash P \qquad x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x, P}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x, P}{\Gamma \vdash P[x \leftarrow t]}$	$\dfrac{\Gamma, (\forall x, P), P[x \leftarrow t] \vdash C}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash C}$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma \vdash P[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \exists x, P}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x, P \qquad \Gamma, P \vdash C \qquad x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma, C)}{\Gamma \vdash C}$	$\dfrac{\Gamma, P \vdash C \qquad x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma, C)}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash C}$
$=$	$\Gamma \vdash t = t$	$\dfrac{\Gamma \vdash t = u \qquad \Gamma \vdash P[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash P[x \leftarrow u]}$	$\dfrac{\Gamma, t = u \vdash P[x \leftarrow t]}{\Gamma, t = u \vdash P[x \leftarrow u]}$

Exemples

Dérivation de $A \Rightarrow B \Rightarrow A$

$$\Rightarrow I\ \dfrac{\Rightarrow I\ \dfrac{\text{HYP}\ \dfrac{}{A, B \vdash A}}{A \vdash B \Rightarrow A}}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}$$

Dérivation de $\neg A \vee B \Rightarrow A \Rightarrow B$

$$\Rightarrow I\ \dfrac{\Rightarrow I\ \dfrac{\vee H\ \dfrac{\neg H\ \dfrac{\text{HYP}\ \dfrac{}{A, \neg A \vdash A}}{A, \neg A \vdash B} \quad \text{HYP}\ \dfrac{}{A, B \vdash B}}{\neg A \vee B, A \vdash B}}{\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B}}{\vdash (\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)}$$

Dérivation de $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$

$$\Rightarrow I\ \dfrac{\neg I\ \dfrac{\Rightarrow H\ \dfrac{\neg H\ \dfrac{\text{HYP}\ \dfrac{}{A \Rightarrow \neg A, A \vdash A}}{\neg A, A \vdash \bot} \quad \text{HYP}\ \dfrac{}{A \vdash A}}{A \Rightarrow \neg A, A \vdash \bot}}{A \Rightarrow \neg A \vdash \neg A}}{\vdash (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A}$$

Dérivation de $(\exists x, P(x)) \Rightarrow \neg \forall y, \neg P(y)$.

$$\Rightarrow I\ \dfrac{\neg I\ \dfrac{\exists H\ \dfrac{\forall H\ \dfrac{\neg H\ \dfrac{\text{HYP}\ \dfrac{}{(\forall y, \neg P(y)), \neg P(x), P(x) \vdash P(x)}}{(\forall y, \neg P(y)), \neg P(x), P(x) \vdash \bot}}{(\forall y, \neg P(y)), P(x) \vdash \bot}}{(\exists x, P(x)), (\forall y, \neg P(y)) \vdash \bot}}{\exists x, P(x) \vdash \neg(\forall y, \neg P(y))}}{\vdash (\exists x, P(x)) \Rightarrow \neg(\forall y, \neg P(y))}$$

Dérivation de $\forall x\, y, x = y \Rightarrow y = x$.

$$\forall I\ \dfrac{\forall I\ \dfrac{\Rightarrow I\ \dfrac{= H\ \dfrac{\dfrac{}{x = y \vdash x = x}}{x = y \vdash y = x}}{\vdash x = y \Rightarrow y = x}}{\vdash \forall y, x = y \Rightarrow y = x}}{\vdash \forall x\, y, x = y \Rightarrow y = x}$$